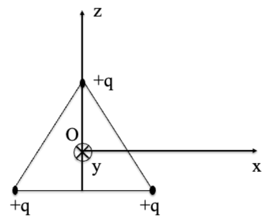
INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE. Durée 1 heure

Exercice 1 (Symétries) 3 points

3 charges électriques ponctuelles identiques et positives de valeur +q, sont réparties aux sommets d'un triangle équilatéral de barycentre O, situé dans le plan (x,O,z). Les axes x,y et z des coordonnées cartésiennes sont indiqués sur la figure. On s'intéresse à l'orientation du champ électrique $\vec{E}$ généré par ces trois charges.



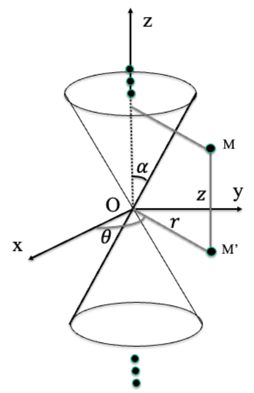
1°) Soit P un point du plan (xOz), de coordonnées cartésiennes (x,0,0) avec $x \neq 0$. Prédire l'orientation de $\vec{E}$ au point P. Indiquer pour cela, la ou les composantes cartésiennes du champ qui sont nulles en justifiant votre réponse.

2°) Soit M un point du plan (xOz), de coordonnées cartésiennes (0,0,z) avec $z \neq 0$. Prédire l'orientation de $\vec{E}$ au point M. Indiquer pour cela, la ou les composantes cartésiennes du champ qui sont nulles en justifiant votre réponse.

3°) Que peut-on dire du champ électrique au point O (justifier) ?

Exercice 2 (Invariances / Symétries) 7 points

La figure représente les deux parties d'un cône d'axe z, d'ouverture angulaire α que nous supposerons de longueur infinie. Le bord supérieur du cône est en $z \to +\infty$ et le bord inférieur en $z \to -\infty$. La surface de ce cône est chargée avec une densité superficielle de charges uniforme σ_0. L'exercice sera traité en **coordonnées cylindriques** (r, θ, z).



Cône infini d'axe z, d'ouverture α, chargé uniformément en surface avec une densité surfacique σ_0.

1°) Donner toutes les invariances du système et en déduire de quelles variables dépendent les différentes composantes du champ électrique $\vec{E}$, généré par ce cône.

2°) Soit un point M quelconque de l'espace, de coordonnées (r, θ, z). Définir précisément tous les plans de symétrie du système contenant ce point M. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(M)$ qui sont nulles au point M.

3°) Soit le point M', de coordonnées $(r, \theta, 0)$ situé dans le plan (x,O,y). Définir précisément tous les plans de symétrie du système contenant ce point M'. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(M')$ qui sont nulles au point M'.

4°) Soit le point M'', de coordonnées $(0, \theta, z)$. Définir précisément tous les plans de symétrie du système contenant ce point M''. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(M'')$ qui sont nulles au point M''.

Exercice 3 (Coordonnées, Circulation, Opérateurs) 6 points

Le champ électrique généré par un fil rectiligne d'axe z, uniformément chargé avec une densité de charges par unité de longueur λ, s'exprime en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{e_r}$

1°) On définit le point A de coordonnées cylindriques (R,$0, h$) et le point B de coordonnées cylindriques (R,π, h). On considère un parcours de A à B correspondant à un demi-cercle de rayon R autour de l'axe z. Calculer la circulation du champ électrique précédemment défini le long de ce parcours. Préciser bien le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et l'expression vectorielle du champ électrique en tout point de ce parcours $\vec{E}_{\widehat{AB}}$.

2°) Exprimer le champ électrique en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire sous la forme :

$$\vec{E} = E_x(x, y, z)\,\overrightarrow{e_x} + E_y(x, y, z)\,\overrightarrow{e_y} + E_z(x, y, z)\,\overrightarrow{e_z}$$

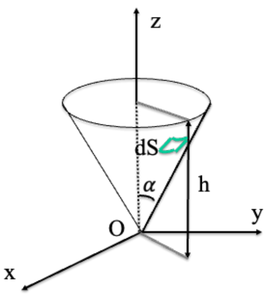
3°) Calculer le rotationnel du champ électrique en coordonnées cartésiennes.

4°) Vérifier le résultat obtenu en calculant le rotationnel du champ électrique en coordonnées cylindriques en appliquant la formule suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Exercice 4 : Eléments de surface 4 points

La figure représente une partie d'un cône d'axe z, d'ouverture angulaire α et de hauteur h. Nous cherchons dans cet exercice à exprimer sa surface en fonction de h et α. Nous traiterons cet exercice en **coordonnées sphériques** (r, θ, φ).



1°) Soit une surface élémentaire dS collée à la surface de ce cône. Quelle est selon vous la surface élémentaire qu'il faut sélectionner afin de calculer la surface de ce cône.

$$a)\ dS = r\ sin\alpha\ dr\ d\varphi\ \ ;\ b)\ dS = r^2\ sin\theta\ d\theta\ d\varphi;\ c)\ dS = r\ dr\ d\theta$$

2°) Exprimer alors la surface du cône par une intégrale double dont on précisera bien les bornes pour tenir compte de sa hauteur égale à h.

3°) Montrer alors que la surface du cône S s'exprime en fonction de h et α par : $S = \frac{\pi\, sin\alpha\, h^2}{cos^2\alpha}$